Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Sucesiones dobles sobre el cuerpo K = R o C y sus aplicaciones

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Lidizeth Kiara ALEJANDRO MORENO

ASESOR

Mg. William César OLANO DIAZ

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Alejandro, L. (2019). *Sucesiones dobles sobre el cuerpo K = R o C y sus aplicaciones*. Tesis para optar el título profesional de Licenciada en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código Orcid del autor (dato opcional): No tengo

Código Orcid del asesor o asesores (dato obligatorio): 0000 0002 0254 9123

DNI del autor: 47263808

Grupo de investigación: No pertenece

Institución que financia parcial o totalmente la investigación: Autofinanciado

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación. Debe incluir localidades y coordenadas geográficas

Jr. Los Corales # 498 – Urb. Balconsillo. La Victoria.

-12.075847,-77.021264

Año o rango de años que la investigación abarcó: 06/2018 – 11/2019

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ..16:30.. horas del Viernes 15 de noviembre de 2019, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Wilfredo Mendoza Quispe (PRESIDENTE), Lic. Marco Antonio Rubio Gallarday (MIEMBRO), Mg. William César Olano Diaz (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «SUCESIONES DOBLES SOBRE EL CUERPO $K = R$ O C Y SUS APLICACIONES», presentado por la señorita Bachiller LIDIZETH KIARA ALEJANDRO MORENO, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, la tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

.DIECISIETE..........(17). SOBRESALIENTE

A continuación, el Presidente del Jurado, Mg. Wilfredo Mendoza Quispe, manifestó que la señorita Bachiller LIDIZETH KIARA ALEJANDRO MORENO, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las ..17:00.. horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

MG. WILFREDO MENDOZA QUISPE
PRESIDENTE

LIC. MARCO ANTONIO RUBIO GALLARDAY
MIEMBRO

MG. WILLIAM CÉSAR OLANO DIAZ
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRAFICA

ALEJANDRO MORENO, LIDIZETH KIARA

SUCESIONES DOBLES EN $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

(Lima, 2019)

X , 63 Páginas, 29.7cm

(UNMSM, Licenciada, Matemática Pura)

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Facultad de Ciencias Matemáticas.

Matemática Pura.

[UNMSM / F de C.M]

Dedicatoria

A mis mamás Delia y Olga con mi eterna devoción e infinito cariño.

Agradecimientos

En primer término, agradezco a mis mamás Delia y Olga por el apoyo y el cuidado que me han brindado durante mi vida. Ellas me insuflarón confianza y valor en la lucha por la vida. Siempre mi eterna gratitud para ellas.

A mi hermano Luiggi que siempre fue mi apoyo y juntos afrontamos muchas situaciones buenas y malas, pero siempre juntos. Gracias eternas

A Junior, por su gran amor y apoyo en mi superación personal y profesional. Gracias eternas.

Al Mg. William César Olano Diaz, por aceptar ser mi asesor de tesis, por el tiempo dedicado, por sus valiosos consejos para el logro de éste trabajo. Gracias eternas.

Al Mg. Adrian Guillermo Aliaga Llanos, por su orientación y sabios consejos, por sus palabras de aliento durante mi formación académica y ejecución del trabajo de tesis, por ser un guía en mi vida. Gracias eternas.

Lidizeth Kiara

RESUMEN

Sucesiones Dobles sobre el Cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R} \circ \mathbb{C}$ y sus Aplicaciones

Lidizeth Kiara Alejandro Moreno

Asesor : Mg. William César Olano Diaz

TÍTULO OBTENIDO : Licenciada en Matemática

En este trabajo investigamos la construcción y propiedades de las sucesiones dobles en el campo de los números reales $\mathbb{R}$ o sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Nuestra investigación considera en la teoría de sucesiones dobles, las relaciones existentes entre la unicidad del límite doble, los límites iterados y el intercambio del orden para la sucesión doble. Investigamos el Criterio de Cauchy para sucesiones dobles, las subsucesiones y los límites dobles monótonas y acotadas. Las sucesiones dobles se aplican a los límites inversos y continuos enrejados.

PALABRAS CLAVES : Sucesiones dobles. Criterio de Cauchy y unicidad del límite para sucesiones dobles. Sucesiones dobles acotadas y sucesiones dobles monótonas. Límites inversos . Continuos enrejados.

ABSTRACT

Double Sequences in $\mathbb{K} = \mathbb{R} \circ \mathbb{C}$ and its Applications

Lidizeth Kiara Alejandro Moreno

Assesor : Mg. William César Olano Díaz

Degree qualification : Licenciada en Matemática

In this work we study the construction and properties of double sequences in the field of real numbers $\mathbb{R}$ and in the field of complex numbers $\mathbb{C}$. Our investigation considers in the theory of double sequences, the relations existing between the uniquences of the limit of the double sequences, the limits and the exchange of order of these. We also study the criterium of Cauchy for double sequences, the subsequences, the monotonous double limits and double bounded sequences.

KEYWORDS : Double sequences. Cauchy criterion and unisequences of the limit for double sequences, double bounded and monotone sequences. Inverse limits. Continuous trellises.

Índice

Introducción

En el presente trabajo de tesis investigamos el estudio de las sucesiones dobles tomadas como una extensión de las sucesiones simples sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ o sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Las sucesiones dobles pueden construirse mediante dos métodos : el geométrico y el algebraíco. El primero a partir de una disposición cuasimatricial de filas y columnas que permite la ubicación del elemento de la sucesión doble correspondiente a la n-ésima fila y m-ésima columna y que es denotado por $X_{n,m}$ o (X_n, Y_m). El método algebraíco presenta una sucesión doble sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ como una función con dominio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y contradominio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Los resultados obtenidos para sucesiones simples constituyen una teoría que gran parte de ella puede desplazarse a las sucesiones dobles, tales como los conceptos de convergencia, oscilación, subsucesiones, unicidad y existencia del límite y el Criterio de Cauchy. Sin embargo existen resultados para sucesiones simples que no se verifican en las sucesiones dobles. Tal es el caso del concepto de punto cumbre o pico, usado para probar el Teorema de Bolzano - Weierstrass.
Para sucesiones dobles, es necesario un análisis diferenciado. Lo desarrollamos en la parte de subsucesiones.

Una sección interesante es la que se refiere a los límites iterados. Se presentan dos situaciones, la primera es cuando los límites iterados existen y la segunda es bajo que condiciones se pueden intercambiar los límites iterados.

Estudiamos las propiedades de las sucesiones dobles iteradas, el álgebra de las sucesiones dobles y las sucesiones de Cauchy.

La distribución del trabajo es de la siguiente manera.
En el capítulo I desarrollamos la construcción algebraica y geométrica de las sucesiones dobles. El criterio de unicidad de los límites de sucesiones dobles. Sucesiones dobles acotadas. Las sucesiones de Cauchy, los límites iterados y el álgebra de límites para sucesiones dobles. En el capítulo II estudiamos las propiedades del límite de una sucesión doble, las propiedades de las sucesiones dobles monótonas y luego abordamos las principales propiedades de las subsucesiones dobles. En el capítulo III veremos algunas aplicaciones de las sucesiones dobles.

Capítulo 1

Preliminares

Una **sucesión doble** es una extensión de una sucesión simple sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ o sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Toda sucesión doble puede construirse mediante los siguientes métodos:

1. Método geométrico , y

2. Método axiomático.

1.1. El Método Geométrico

El método geométrico consiste en la disposición rectangular siguiente :

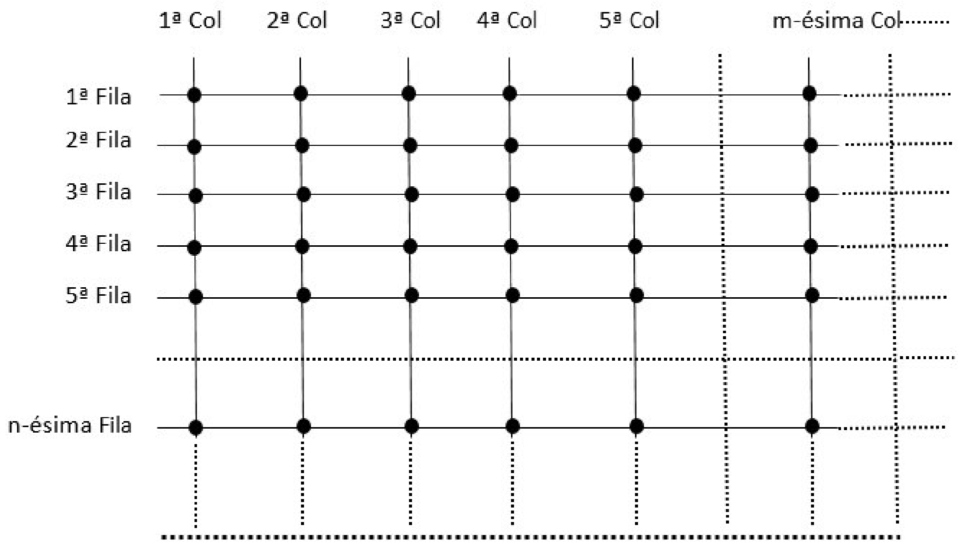


Figura.1

1. Un subíndice de la sucesión doble corresponde al punto de intersección de la n- ésima fila en la m- ésima columna. Este punto lo escribiremos simbólicamente como un par, donde la primera componente es la n-ésima fila y la segunda componente la m- ésima columna, esto es, el par ordenado (n, m) representará el subíndice de la n- ésima y m- ésima elemento de la sucesión doble, que lo escribiremos como

$$X_{n,m}$$

2. Los subíndices obtenidos verifican la ecuación

$$(n, m) - 1 = p$$

donde p es el punto que corresponde a la intersección de la n- ésima fila con la m- ésima columna en la siguiente disposición.

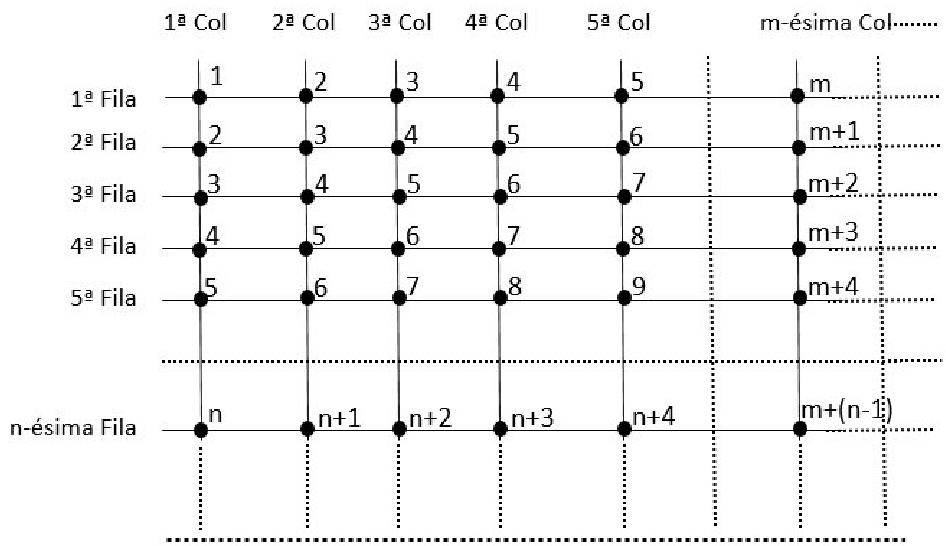


Figura.2

3. Por ejemplo, el subíndice del elemento de la sucesión doble correspondiente a la tercera fila y la cuarta columna será el par $(3, 4)$ y verifica que

$$(3 + 4) - 1 = 6$$

que es el punto correspondiente a la intersección de la tercera fila con la cuarta columna en la **Figura.2**

El elemento correspondiente en la sucesión doble será

$$a_{3,4}$$

4. En general el subíndice del elemento de la sucesión doble correspondiente a la n-fila y m- columna se escribirá como

$$a_{n,m} \ ,$$

y la sucesión doble correspondiente será

$$(a_{n,m})_{n,m=1}^{\infty},$$

5. La doble sucesión así obtenida también podrá denotarse por

$$(a_{n,m})_{n,m=1}^{\infty} = (X_n, Y_m)_{n,m=1}^{\infty}.$$

1.2. Método Algebraico

Este método de construcción de sucesiones dobles difiere del método geométrico en cuanto se refiere a su metodología, pero coincide hacia el mismo fin, cual es, la obtensión de una sucesión doble en el campo de los números reales o en el campo de los números complejos.

1.2.1. Sucesiones sobre $\mathbb{K}$

Observación 1.1. .

1. *En lo sucesivo denotaremos por* $\mathbb{K}$ *el cuerpo de los números reales* $\mathbb{R}$ *o el cuerpo de los números complejos* $\mathbb{C}$ *indistintamente, salvo alguna especificación particular.*

2. *Daremos a continuación la definición algebraica de una sucesión doble sobre* $\mathbb{K}$*. Esta sucesión es una función con dominio el producto cartesiano* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *y contradominio el cuerpo* $\mathbb{K}$*.*

Definición 1.1. *Sean* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(Y_m)_{m=1}^{\infty}$ *dos sucesiones sobre* $\mathbb{K}$ *.*

Una ***sucesión doble*** *sobre* $\mathbb{K}$ *es una función*

$$\omega : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$((X_n), (Y_m)) \longmapsto \omega(X_n, Y_m) = (X_n, Y_m)_{n,m=1}^{\infty}.$$

Observación 1.2. *La sucesión doble* $(X_n, Y_m)_{n,m=1}^{\infty}$ *de la Definición 1.1 en realidad representa el par de sucesiones simples* (X_n, Y_m) *sobre* $\mathbb{K}$*, esto es.*

$$\omega(X_n, Y_m) = (X_n, Y_m)_{n,m=1}^{\infty}$$

Para mejor manejo operativo, las sucesiones dobles así definidas las representaremos por $(X_n, Y_m) = X_{n,m}$ *siempre sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$.

1.2.1.1 Ejemplos

1. Sea la sucesión doble $S = X_{n,m}$ tal que

$$X_{n,m} = \frac{1}{n+m}.$$

Fijando n y haciendo variar m en $\mathbb{N}$ obtenemos los elementos de la sucesión doble dada

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+2} & \frac{1}{1+3} & \frac{1}{1+4} & \ldots\ldots \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} & \frac{1}{2+3} & \frac{1}{2+4} & \ldots\ldots \\ \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} & \frac{1}{3+3} & \frac{1}{3+4} & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \end{bmatrix}$$

o también

$$
S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \ldots\ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \ldots\ldots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{bmatrix}
$$

2. Ahora consideramos la sucesión doble $U = \mathcal{U}_{n,m}$ tal que

$$
\mathcal{U}_{n,m} = \frac{1}{2^n \ . \ 3^m}
$$

Fijando n y haciendo variar m en $\mathbb{N}$ obtenemos los términos de la sucesión doble U.

$$
U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2.3} & \frac{1}{2.3^2} & \frac{1}{2.3^3} & \frac{1}{2.3^4} & \ldots\ldots \\ \frac{1}{2^2.3} & \frac{1}{2^2.3^2} & \frac{1}{2^2.3^3} & \frac{1}{2^2.3^4} & \ldots\ldots \\ \frac{1}{2^3.3} & \frac{1}{2^3.3^2} & \frac{1}{2^3.3^3} & \frac{1}{2^3.3^4} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}
$$

esto es,

$$
U = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{54} & \frac{1}{162} & \ldots\ldots \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} & \frac{1}{108} & \frac{1}{324} & \ldots\ldots \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{72} & \frac{1}{216} & \frac{1}{648} & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}
$$

1.2.2. Convergencia y Unicidad de Sucesiones Dobles

Definición 1.2. *Sean*

$X_{n,m}$ *: una sucesión doble sobre* $\mathbb{K}$

L *: un número en* $\mathbb{K}$.

Si $X_{n,m}$ *se acerca hacia el número* L *cuando* n *y* m *crecen indefinidamente, entonces decimos que la sucesión doble* $X_{n,m}$ ***tiende hacia el valor*** L *y se denota por*

$$\lim_{n,m\to+\infty} X_{n,m} = L.$$

Observación 1.3. *A partir de la Definición 1.2 podemos obtener otra definición de convergencia de una sucesión doble.*

Definición 1.3. *Sean*

$X_{n,m}$ *: una sucesión doble sobre* $\mathbb{K}$

L *: un número en* $\mathbb{K}$.

Decimos que la sucesión doble $X_{n,m}$ ***converge*** *hacia el número* L *en* $\mathbb{K}$*, si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que si* $n, m \geq \delta$*, entonces se verifica que*

$$|X_{n,m} - L| < \varepsilon.$$

En la siguiente figura tenemos que los términos $X_{n,m}$ *de la sucesión doble tales que* $n \geq \delta$ *y* $m \geq \delta$ *ocupan el cuarto cuadrante y son aproximadamente iguales al número real* L.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \delta\text{-ésima Columna} \end{array} \\
\delta\text{-ésima Fila} & \left[\begin{array}{ccc|ccc}
X_{11} & X_{12} & \cdots\cdots & X_{1\delta} & \cdots\cdots & \\
X_{21} & X_{22} & \cdots\cdots & X_{2\delta} & \cdots\cdots & \\
\hline
X_{\delta 1} & X_{\delta 2} & & X_{\delta\delta} & L & L \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & L & L & L \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & L & L & L
\end{array}\right]
\end{array}
$$

1.2.2.1 Ejemplos

1. Sea la sucesión doble $S = X_{n,m}$ tal que

$$X_{n,m} = \frac{1}{n+m}.$$

   Tenemos entonces que $\lim\limits_{n,m\to\infty} \dfrac{1}{n+m} = 0$.

2. Sea la sucesión doble $X_{n,m}$ tal que $X_{n,m} = k$ con $k \in \mathbb{R}$. Tendremos que

$$X_{n,m} = \begin{bmatrix} k & k & k & k & \cdots \\ k & k & k & k & \cdots \\ k & k & k & k & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

   Luego $\lim\limits_{n,m\to\infty} k = k$.

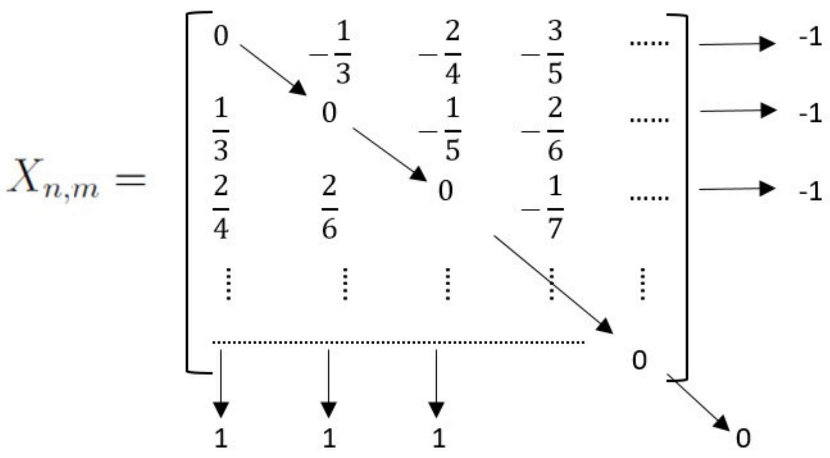
3. Sea la sucesión doble $X_{n,m}$ tal que

$$X_{n,m} = \frac{n-m}{n+m}.$$

Observamos que el límite de la sucesión doble no existe, pues tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n-m}{n+m} &= 1 \\ \lim_{m\longrightarrow\infty} \frac{n-m}{n+m} &= -1 \\ \lim_{n,m\longrightarrow\infty} \frac{n-m}{n+m} &= 0. \end{aligned}$$

Esto puede observarse en el gráfico siguiente



Observación 1.4. *El siguiente teorema de los números reales es muy útil para probar algunos teoremas sobre límites dobles.*

Teorema 1.1. *Dado $\varepsilon > 0$. Si $\mid x \mid < \varepsilon$ entonces $x = 0$.*

Demostración

Supongamos que $x \neq 0$, *luego* $\mid x \mid > 0$. *Tomando* $\varepsilon = \dfrac{\mid x \mid}{2} > 0$ *y como* $\mid x \mid < \varepsilon$ *tenemos que* $\mid x \mid < \dfrac{\mid x \mid}{2}$ *entonces* $1 < \dfrac{1}{2}$.

Este resultado es una contradicción y se debe a la falsedad de la hipótesis auxiliar.

Luego $x = 0$. ■

Teorema 1.2. *"**(Unicidad de límites dobles)***

El límite de una sucesión doble convergente en $\mathbb{R}$ *es único.*

Demostración

Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{R}$.

Supongamos que exista :

1. $l \in \mathbb{R}$ *que verifica la propiedad : Para cada* $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, *existe* $\delta_1 = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que si* $n, m \geq \delta_1$, *se cumple que* $\mid X_{n,m} - l \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$

2. $L \in \mathbb{R}$ *que verifica la propiedad : Para cada* $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, *existe* $\delta_2 = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que si* $n, m \geq \delta_2$, *se cumple que* $\mid X_{n,m} - L \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Tenemos de (1) *y* (2)

$$\begin{aligned}
0 \leq \mid L - l \mid &= \mid (X_{n,m} - L) + (X_{n,m} - l) \mid \\
&= \mid X_{n,m} - L \mid + \mid X_{n,m} - l \mid \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces $\mid L - l \mid < \varepsilon$ *y del* ***Teorema 1.1*** *se concluye que* $L = l$.

Así el límite de $X_{n,m}$ *es único".*

■

Observación 1.5. *Si la sucesión doble $X_{n,m}$ converge al número real L, decimos que la sucesión es **convergente** y simbólicamente escribimos*

$$\lim_{n,m\to+\infty} X_{n,m} = L$$

o también

$$X_{n,m} \longrightarrow L$$

L se llama el límite de la sucesión doble. Si no existiera el número L decimos que la sucesión doble $X_{n,m}$ es divergente.

Definición 1.4. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$. Diremos que la sucesión doble $X_{n,m}$, **tiende a** $+\infty$ y escribiremos por*

$$\lim_{n,m\to+\infty} X_{n,m} = \infty \quad o \quad X_{n,m} \longrightarrow +\infty$$

si para cada $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $n, m \geq \delta$, entonces

$$X_{n,m} > \varepsilon.$$

Definición 1.5. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$. Diremos que la sucesión doble $X_{n,m}$, **tiende a** $-\infty$ y escribiremos por*

$$\lim_{n,m\to\infty} X_{n,m} = -\infty \quad o \quad X_{n,m} \longrightarrow -\infty$$

si para cada $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $n, m \geq \delta$, entonces

$$X_{n,m} < -\varepsilon.$$

Definición 1.6. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$. Diremos que la sucesión doble $X_{n,m}$ es* ***propiamente divergente en dos casos*** *si*

$$\lim_{n,m\to+\infty} X_{n,m} = \infty \quad o \quad \lim_{n,m\to+\infty} X_{n,m} = -\infty.$$

Definición 1.7. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$. Diremos que la sucesión doble $X_{n,m}$ es* ***oscilante*** *si la sucesión doble $X_{n,m}$ no converge y no es propiamente divergente en dos casos a medida que $X_{n,m} = (X_n, Y_m)_{n,m=1}^{\infty}$ esté acotado o no.*

Observación 1.6. *Recordemos*

1. *Dada la sucesión (X_n, Y_m) sobre $\mathbb{K}$, si X_n, Y_m crecen acercándose al número L cuando n y m crecen indefinidamente entonces se dice que la sucesión tiende a L cuando $n \longrightarrow \infty$ y $m \longrightarrow \infty$ y escribiremos por*

$$\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} (X_n, Y_m) = L.$$

Es decir, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe otro número $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|X_n, Y_m - L| < \varepsilon \ \text{ para todo } \ n, m \geq N.$$

Como se puede ver en el siguiente esquema

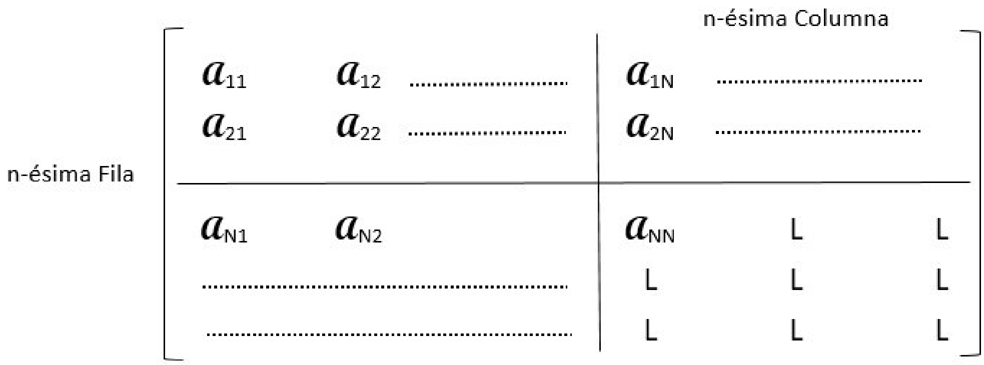


Figura.3

Los elementos $a_{n,m}$ *de la sucesión doble tales que* $n \geq N$, $m \geq N$ *son aproximadamente iguales a* L *y ocupan el recuadro inferior derecho de la Figura 3.*

2. *Sea la sucesión doble* $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{K}$. *Consideremos los siguientes límites asociados a* $X_{n,m}$ *:*

   a) $L = \lim\limits_{n,m \longrightarrow +\infty} (X_n, Y_m)$.

   b) $M = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} (X_n, Y_m))$.

   c) $N = \lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} (\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (X_n, Y_m))$.

1.2.3. Ejemplos

Ejemplo 1.1. *Sea la sucesión doble* $X_{n,m}$ *tal que*

$$X_{n,m} = \frac{1}{n+m}$$

entonces $\lim\limits_{n,m \longrightarrow +\infty} \quad \frac{1}{n+m} = 0$.

Demostración

Esta sucesión converge. En efecto :

Primero observamos que si $N_0 \in \mathbb{N}$ *y* $n, m \in \mathbb{N}$ *son tales que* $n, m \geq N_0$ *.*

Se tiene que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N_0}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ *, y sea* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{2}{\varepsilon} < N$*. (Por la propiedad arquimediana)*

Para $n, m \geq N$ *se tiene que :*

$$\left|\frac{1}{n+m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$

Por lo tanto se tiene que $X_{n,m}$ *converge a cero.*

Ejemplo 1.2. *La sucesión doble* $X_{n,m} = \dfrac{n}{n+m}$ *es divergente.*

Demostración

Notemos que $X_{n,n} = \dfrac{1}{2}$ *y* $X_{n,2n} = \dfrac{1}{3}$.

Para $n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n = m$ *se tiene* $X_{n,n} = \dfrac{1}{2}$.

Para $n, m \in \mathbb{N}$ *con* $n = 2m$ *se tiene* $X_{n,2n} = \dfrac{1}{3}$.

Por la unicidad de límite, la sucessión $X_{n,m}$ *no converge.*

Por lo tanto $X_{n,m}$ *es divergente.*

Ejemplo 1.3. *"Sea la sucesión doble* $X_{n,m} = n + m$ *, entonces* $X_{n,m}$ *es propiamente divergente a* $+\infty$*.*

Demostración

Sea $k > 0$ y $N = k$. Se tiene que si $n, m \geq N$, entonces

$$X_{n,m} = n + m \geq 2N = 2k > k.$$

Por tanto $X_{n,m}$ es propiamente divergente a $+\infty$."

Ejemplo 1.4. *"Sea la sucesión doble $X_{n,m} = 1 - n - m$, entonces $X_{n,m}$ es propiamente divergente a $-\infty$.*

Demostración

Sea $\beta < 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1-\beta}{2} < k$.
Si $n, m \geq k$, entonces $n + m \geq 2k > 1 - \beta$
Esto nos dice que

$$1 - n - m < 1 - 2k < \beta$$

Por lo tanto $X_{n,m}$ es propiamente divergente a $-\infty$".

1.2.4. Sucesiones Dobles Acotadas

Definición 1.8. *"Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$. Diremos que la sucesión doble $X_{n,m}$ es **acotada** si existe $M > 0$ tal que $\mid X_{n,m} \mid \leq M$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$."*

Teorema 1.3. *"Toda sucesión doble convergente sobre $\mathbb{K}$ es acotada.*

Demostración

Supongamos que $X_{n,m} \longrightarrow a$, cuando n, m tiende a $+\infty$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n, m \geq N$, entonces $\mid X_{n,m} - a \mid < 1$
Como $||X_{n,m}| - |a|| < |X_{n,m} - a|$ se tiene que

$$| X_{n,m} | - | a | \leq | X_{n,m} - a | < 1.$$

Por tanto $| X_{n,m} | < 1 + | a | \ \ , \ \forall n,m \geq N.$

Sea

$M := max\{| \ (1,1)_{n,m=1}^{\infty} \ |, | \ (1,2)_{n,m=1}^{\infty} \ |, | \ (2,1)_{n,m=1}^{\infty} \ |, \ldots, | \ (N-1, N-1)_{n,m=1}^{\infty} \ |, | \ a \ | +1\}$.

$M := max\{| \ (i,j)_{n,m=1}^{\infty} \ |, 1+ | \ a \ |$ *donde* $1 < i, j \leq N\}$.

Concluimos que $| X_{n,m} | \leq M$ *para todo* $n, m \in \mathbb{N}$ *".*

■

1.2.5. Sucesión Doble Cauchy

Definición 1.9. *"Sea una sucesión doble* $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{K}$*. Diremos que la sucesión doble* $X_{n,m}$ *es de* ***Cauchy*** *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$| X_{p,q} - X_{n,m} | < \varepsilon \ , \ \forall \ p > n > N, \forall \ q > m > N\text{"}$$

Teorema 1.4. *"****(Criterio de Convergencia de Cauchy para Sucesiones Dobles)***

Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{K}$*. Son equivalentes las siguientes afirmaciones :*

1. $X_{n,m}$ *es convergente .*

2. $X_{n,m}$ *es Cauchy .*

Demostración

$(1) \Rightarrow (2)$ *Asumimos que* $X_{n,m} \longrightarrow a$ *cuando* $n, m \longrightarrow +\infty$ *para un* $a \in \mathbb{K}$.

Luego, dado $\varepsilon > 0$ *,existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mid X_{n,m} - a \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ *,* $\forall n, m \geq N$.

Entonces,

$$\forall p > n > N \ , \ \forall \ q > m > N$$

se tiene

$$\begin{aligned} \mid X_{p,q} - X_{n,m} \mid &= \mid X_{p,q} - a + a - X_{n,m} \mid \\ &\leq \mid X_{p,q} - a \mid + \mid X_{n,m} - a \mid \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X_{n,m}$ *es una sucesión de Cauchy.*

$(2) \Rightarrow (1)$ *Asumimos que* $X_{n,m}$ *es una sucesión de Cauchy. Dado* $\varepsilon > 0$ *. Tomando* $m = n$ *y escribiendo* $X_{n,m} = b_n$ *, es inmediato que existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mid b_p - b_n \mid < \varepsilon$ *,* $\forall p \geq n \geq N$ *.*

*Por el **Teorema 1.4**, la sucesión* (b_n) *converge hacia* $a \in \mathbb{K}$.

Entonces ,

$$\exists \ N_1 \in \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ \mid b_n - a \mid < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \forall n \geq N_1.$$

Como $X_{n,m}$ *es una sucesión de Cauchy*

$$\exists \ N_2 \in \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ \mid X_{p,q} - b_n \mid < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \forall p, q \geq n \geq N_2.$$

Sea $M := max\{N_1, N_2\}$ *y escogemos* $n \geq N$.

Luego obtenemos que :

$$\begin{aligned} \mid X_{p,q} - a \mid &\leq \mid X_{p,q} - b_n \mid + \mid b_n - a \mid \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad , \quad \forall p,q \geq N. \end{aligned}$$

Por lo tanto $X_{n,m}$ converge hacia a".

■

El siguiente teorema, conocido como el Teorema de Sandwich funciona solo cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 1.5. ***(Sandwich)***

Sean las sucesiones dobles $X_{n,m}$, $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada $n,m \in \mathbb{N}$ tenemos

$$A_{n,m} \leq X_{n,m} \leq B_{n,m}$$

y supongamos también que

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} A_{n,m} = \lim_{n,m \longrightarrow +\infty} B_{n,m} = a.$$

Entonces $X_{n,m}$ converge y

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = a.$$

Demostración

Tomemos $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n,m \geq N$, entonces

$$\mid A_{n,m} - a \mid < \varepsilon \quad y \quad \mid B_{n,m} - a \mid < \varepsilon$$

Entonces

$$-\varepsilon < A_{n,m} - a < X_{n,m} - a < B_{n,m} - a < \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = a.$$

■

1.2.6. Límites Iterados para Sucesiones Dobles

Dada una sucesión doble $X_{n,m}$ se puede fijar cualesquiera de las dos variables para obtener una sucesión simple.

En esta sección estudiamos como se relacionan el límite simple y el límite doble, para ellos introducimos el concepto de límite iterado.

Definición 1.10. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$, los límites*

1. $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right)$ *y*
2. $\displaystyle\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right)$

se llaman ***límites iterados*** *.*

Observación 1.7. *La Definición 1.10 conlleva a la siguiente interrogación.*

¿ Si existen los límites iterados, ellos son iguales?

Estudiamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5. *Sea* $X_{n,m} = \dfrac{n}{n+m}$*. Se tiene que*

para todo $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = 1$

Entonces

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} (\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m}) = 1$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = 0$

Entonces

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m}) = 0.$$

Observamos que el límite doble de la sucesión doble no existe, esto es, la sucesión doble $X_{n,m} = \dfrac{n}{n+m}$ es divergente.

En efecto, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande con $n = m$ tenemos que $X_{n,m} = \dfrac{1}{2}$, mientras que para $n, m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande con $n = 2m$ tenemos que $X_{n,m} = \dfrac{2}{3}$. Esto implica que la sucesión $X_{n,m}$ no converge hacia el punto u, para algún $u \in \mathbb{R}$ cuando n, m crecen indefinidamente, esto es, cuando $n, m \longrightarrow +\infty$

Observación 1.8. *Si una sucesión doble* $X_{n,m}$ *es convergente, nos preguntamos: ¿ Existirán los límites iterados?*

La respuesta es no. Lo ilustramos mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6. *Sea la sucesión doble*

$$X_{n,m} = (-1)^{n+m} (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}).$$

Claramente,

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = 0.$$

En efecto :

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

así, si $n, m \geq N$ *entonces*

$$\left|(-1)^{n+m}(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\right| \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Por otro lado

a) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijado, el límite simple* $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} (-1)^{n+m}(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})$ *no existe.*

   Por tanto el límite iterado, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m})$ *tampoco existe.*

b) *Para cada $m \in \mathbb{N}$ fijado, el límite simple* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (-1)^{n+m}(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})$ *no existe.*

   Por tanto el límite iterado, $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} (\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m})$ *tampoco existe.*

Por tanto ambos límites iterados no existen.

"En el siguiente ejemplo proporcionaremos una sucesión doble para la cual los límites iterados y el límite de la sucesión doble coinciden."

Ejemplo 1.7. *Sea la sucesión doble* $X_{n,m} = \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$.

Haciendo unos cambios al Ejemplo 1.7., se puede mostrar que

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) = 0.$$

En efecto :

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$,
así, si $n, m \geq N$ entonces

$$\left|\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon\ .$$

Además

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = \frac{1}{m} \quad y \quad \lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = \frac{1}{n} \ .$$

Se deduce que los límites iterados también existen y

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = \lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = 0.$$

Es decir

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$
$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \right) = \lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{1}{m} = 0.$$

"En el siguiente ejemplo proporcionaremos una sucesión doble para la cual existe su límite doble y sin embargo, uno de sus límites iterados no existe."

Ejemplo 1.8. *Sea la sucesión doble*

$$X_{n,m} = (-1)^m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$$

Sabemos que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ *, por argumentos similares que se dá en el Ejemplo 1.7.*

En efecto :

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$,
así, si $n, m \geq N$ *entonces*

$$| X_{n,m} | = \left| (-1)^m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Por lo que

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = 0.$$

Además los límites iterados

a) *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\underset{m \longrightarrow +\infty}{lim} (-1)^m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$ *no existe.*

Por lo tanto $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} (\underset{m \longrightarrow +\infty}{lim} X_{n,m})$ *no existe.*

b) *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} (-1)^m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = \frac{(-1)^m}{m}$.

Por lo tanto $\underset{m \longrightarrow +\infty}{lim} (\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} X_{n,m}) = 0$.

Observación 1.9. *"Podemos tener sucesiones dobles en la que ni el límite de la sucesión ni los límites iterados existan".*

1.2.7. Álgebra de Límites de Sucesiones Dobles

"En esta sección se estudiarán algunos resultados que nos permitan evaluar el límite doble y el límite iterado de una sucesión doble".

El resultado siguiente proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia de un límite iterado de una sucesión doble convergente.

En este contexto estudiaremos el límite doble como producto y el límite doble como suma.

1.2.7.1 Límite doble como Producto

Teorema 1.6. *Sea la sucesión doble* $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{K}$, *tal que puede escribirse por*

$$X_{n,m} = a_n b_m$$

y para cada límite sean $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = l_1$ *y* $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} b_m = l_2$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} &= \lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) \\
&= l_1 . l_2 \ .
\end{aligned}$$

Demostración

Por hipótesis se tiene

i)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} (\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m}) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\lim_{m \longrightarrow +\infty} a_n b_m) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n \lim_{m \longrightarrow +\infty} b_m \\
&= l_1 l_2 .
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{m \longrightarrow +\infty} (\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m}) &= \lim_{m \longrightarrow +\infty} (\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n b_m) \\
&= \lim_{m \longrightarrow +\infty} b_m \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n \\
&= l_2 l_1 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\lim_{m\longrightarrow+\infty} X_{n,m}) = \lim_{m\longrightarrow+\infty}(\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_{n,m}) = l_1.l_2.$$

ii) Probaremos que $\lim\limits_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{n,m} = l_1.l_2$

Sea $\varepsilon > 0$ *dado. Por el* ***Teorema 1.3*** *existe* $k > 0$ *tal que* $| a_n |\leq k$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Como $a_n \longrightarrow l_1$ *y* $b_m \longrightarrow l_2$, *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2b} \quad y \quad |b_m - l_2| < \frac{\varepsilon}{2b} \quad , \quad \forall\ n, m \geq N.$$

donde $b := max\{k, |l_1|\}$ *entonces tenemos que para cada* $n, m \geq N$:

$$\begin{aligned}
|X_{n,m} - l_1 l_2| &= |a_n b_m - a_n l_2 + a_n l_2 - l_1 l_2| \\
&\leq |a_n||b_m - l_2| + |a_n - l_1||l_2| \\
&< \frac{\varepsilon}{2b}|a_n| + \frac{\varepsilon}{2b}|l_2| \\
&= \frac{\varepsilon}{2b}k + \frac{\varepsilon}{2b}|l_2| \\
&\leq 2b\frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $X_{n,m} \longrightarrow l_1 l_2$, *cuando* $n, m \longrightarrow +\infty$ *Es decir*

$$\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{n,m} = l_1 l_2.$$

■

Ejemplo 1.9. *Sea una sucesión doble*

$$\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{n,m} = \frac{1}{n\ m}, \quad \forall\ n, m \in \mathbb{N}.$$

Escribimos $X_{n,m} = a_n b_m = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{m}\right)$, $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$.

Sabemos que $a_n = \frac{1}{n}$ *y* $b_m = \frac{1}{m}$ *convergen a cero cuando* $n \longrightarrow +\infty$, $m \longrightarrow +\infty$ *respectivamente. Entonces*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} b_m = \lim_{m\longrightarrow+\infty} \frac{1}{m} = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n\ m} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{m\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n\ m}\right) \\
&= \lim_{m\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n\ m}\right) \\
&= \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\right)\left(\lim_{m\longrightarrow+\infty} \frac{1}{m}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

1.2.7.2 Límite doble como Suma

Teorema 1.7. *Sea la sucesión doble* $X_{n,m}$ *tal que*

$$X_{n,m} = a_n + b_m$$

y para cada límite sean $\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = l_1$ *y* $\lim_{m\longrightarrow+\infty} b_m = l_2$.

Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{m\longrightarrow+\infty}(\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_{n,m}) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}(\lim_{m\longrightarrow+\infty} X_{n,m})\\ &= \lim_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{n,m}\\ &= l_1 + l_2.\end{aligned}$$

Demostración

Por hipótesis se tiene

i)

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\lim_{m\longrightarrow+\infty} X_{n,m}) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}(\lim_{m\longrightarrow+\infty}(a_n + b_m))\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n + \lim_{m\longrightarrow+\infty} b_m\\ &= l_1 + l_2.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{m\longrightarrow+\infty}(\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_{n,m}) &= \lim_{m\longrightarrow+\infty}(\lim_{n\longrightarrow+\infty}(a_n + b_m))\\ &= \lim_{m\longrightarrow+\infty} a_n + \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_m\\ &= l_1 + l_2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\lim_{m\longrightarrow+\infty} X_{n,m}) = \lim_{m\longrightarrow+\infty}(\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_{n,m}) = l_1 l_2.$$

ii) Probaremos que $\lim\limits_{n,m \longrightarrow \infty} X_{n,m} = l_1 + l_2$.

Sea $\varepsilon > 0$ *dado. Existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que,* $|a_n - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ *y* $|b_m - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, *para todo* $n, m \geq N$. *Entonces*

$$\begin{aligned} |X_{n,m} - (l_1 + l_2)| &= |(a_n + b_m) - (l_1 + l_2)| \\ &\leq |a_n - l_1| + |b_m - l_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces $X_{n,m} \longrightarrow (l_1 + l_2)$, *cuando* $n, m \longrightarrow +\infty$.

Por lo tanto

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = l_1 + l_2.$$

■

Ejemplo 1.10. *Sea una sucesión doble*

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

$\forall \;\; n, m \in \mathbb{N}$.

En el ***Ejemplo 1.8*** *mostramos que*

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = \lim_{n,m \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) = 0.$$

Por el ***Teorema 1.7*** *, tenemos*

$$
\begin{aligned}
\lim_{n,m\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{m\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right)\\
&= \lim_{m\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right)\\
&= \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\right)+\left(\lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{1}{m}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

Propiedades

2.1. Propiedades del Límite Doble

Teorema 2.1. *"Sea $X_{n,m}$ una sucesión doble sobre $\mathbb{K}$ y $a \in \mathbb{K}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones*

1. $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = a$.

2. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m}$ *existe para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2) *La condición necesaria es inmediata ya que si,*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = a$$

necesariamente debemos tener que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m}$$

existe.

$(2) \Rightarrow (1)$ *Ahora, para la condición suficiente asumamos que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = C_m$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. *Debemos mostrar que* $C_m \longrightarrow a$ *cuando* $m \longrightarrow +\infty$.

En efecto: Sea $\varepsilon > 0$ *dado.*

Como $X_{n,m} \to a$ *cuando* $n, m \to +\infty$, *existe* $Z_1 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m \geq Z_1$, *entonces*

$$|X_{n,m} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como para cada $m \in \mathbb{N}$, $X_{n,m} \longrightarrow C_m$ *cuando* $n \longrightarrow +\infty$, *existe* $Z_2 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq Z_2$, *entonces*

$$|X_{n,m} - C_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora tomemos $n \geq \max\{Z_1, Z_2\}$. *Para* $m \geq Z_1$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} |C_m - a| &= |C_m - X_{n,m} + X_{n,m} - a| \\ &\leq |C_m - X_{n,m}| + |X_{n,m} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C_m \longrightarrow a$ *cuando* $m \longrightarrow +\infty$*".*

$\blacksquare$

Observación 2.1. *"En el **Teorema 2.1**, es importante considerar el orden de las hipótesis. Ya que podemos tener que*

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} X_{n,m} \text{ existe,}$$

y que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} X_{n,m} \text{ existe.}$$

Sin embargo tener que

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\lim_{n\longrightarrow\infty} X_{n,m} = a\ ."$$

Veamos el siguiente.

Ejemplo 2.1. *Sea la sucesión* $X_{n,m} = \dfrac{(-1)^n}{m}$.
Sea $\varepsilon > 0$. *Sabemos que* $a_m = \dfrac{1}{m}$ *converge a cero, cuando* $m \to \infty$. *Entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$ *si* $m \geq N$. *Así, si* $n, m \geq N$, *entonces*

$$\left|\frac{(-1)^n}{m}\right| \leq \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Entonces

$$\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{n,m} = 0.$$

Sin embargo,

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} \frac{(-1)^n}{m}$$

no existe, al igual que

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty}\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(-1)^n}{m}.$$

Teorema 2.2. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ tal que $\lim\limits_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = a$, donde $a \in \mathbb{K}$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones :*

1. $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = a.$

2. $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m}$ *existe para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

El resultado se llega de manera similar al del ***Teorema 2.1****.* ∎

Combinando los resultados de los **Teorema 2.1** y **Teorema 2.2** , obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) \quad y \quad \lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right)$$

existen y son iguales a a si y sólo si

(i) $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m}$ *existe para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y*

(ii) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m}$ *existe para cada* $m \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.2. *Sea una sucesión doble* $X_{n,m} = \dfrac{n\ m}{n^2 + m^2}$.

Se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n\ m}{n^2 + m^2} = 0$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{n\ m}{n^2 + m^2} = 0.$$

Sin embargo,

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \frac{n\ m}{n^2+m^2} \text{ no existe.}$$

Ya que si $n = m$, *entonces* $X_{n,m} = \dfrac{1}{2}$ *y si* $n = 2m$, *entonces* $X_{n,m} = \dfrac{2}{5}$.

Podemos concluir que los límites iterados existen y la sucesión no es convergente.

Definición 2.1. *"Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones, decimos que* ***converge uniformemente*** *a* f *sobre el conjunto* X *si para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\text{si} \quad n \geq N \quad \text{entonces} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad x \in X\text{''}.$$

A continuación daremos un resultado asociado al (Ejemplo 2.2), el cual nos proporciona condiciones para que los límites iterados y el límite doble sean iguales.

Teorema 2.3. *"Sea una sucesión doble* $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{K}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *que satisfacen las siguientes condiciones :*

1. $\displaystyle\lim_{m\longrightarrow+\infty} \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_{n,m} \right) = a.$
2. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_{n,m}$ *existe y converge uniformemente con respecto a* $m \in \mathbb{N}$.
   Entonces $\displaystyle\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{n,m} = a.$

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, *definimos a* f_n *sobre* $\mathbb{N}$ *de la siguiente forma*

$$f_n(m) = (X_{n,m}).$$

Se tiene por el ***Teorema 1.4*** *para sucesiones de funciones que para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N_1$,

$$|X_{n,m} - f(m)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ahora, por (1)

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} f(m) = a.$$

Dado $\varepsilon > 0$, *existe* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m \geq N_2$, *entonces*

$$|f(m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $N := \max\{N_1, N_2\}$ *y* $n, m \geq N$, *entonces*

$$\begin{aligned}
|X_{n,m} - a| &= |X_{n,m} - f(m) + f(m) - a| \\
&\leq |X_{n,m} - f(m)| + |f(m) - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = a$". ■

Observación 2.2. *"Es de gran importancia mostrar que la sucesión converge uniformemente, ya que de lo contrario no podremos garantizar la igualdad entre límite doble y los límites iterados. Como se muestra en el siguiente ejemplo".*

Ejemplo 2.3. *"Consideremos* $X_{n,m} = \dfrac{nm}{n^2+m^2}$.

1. *Sabemos que* $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} X_{n,m} = \underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} \dfrac{nm}{n^2+m^2} = 0.$

2. *Como consecuencia de* (1) *tenemos que*

$$\underset{m\longrightarrow+\infty}{lim}\left(\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} X_{n,m}\right) = \underset{m\longrightarrow+\infty}{lim}\left(\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} \frac{nm}{n^2+m^2}\right) = 0.$$

3. *La convergencia en* (1) *no es uniforme con respecto a* m, *ya que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |X_{n,m}| = \frac{1}{2}.$$

En efecto : Para cada $x \in \mathbb{R}^+$, *definamos*

$$f_n(x) = |X_{n,m}| = \frac{nx}{n^2+x^2}.$$

Como

$$f'(x) = \frac{n^3 - nx^2}{(n^2+x^2)^2}$$

entonces $f'(x) = 0$ *si y sólo si* $n^2 = x^2$, *esto es, si* $n = x$.

Por el criterio de la segunda derivada, f *alcanza el supremo cuando* $n = x$. *Así*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |X_{n,m}| = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $X_{n,m}$ *no converge uniformemente ya que si tomamos* $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, *para toda* N *existe* $m = n$ *tal que* $|f_n - m| = \dfrac{1}{2} > \varepsilon$.*"*

2.2. Propiedades de las Sucesiones Dobles Monótonas

Definición 2.2. *La sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$ será **creciente** si*

$$X_{n,m} \preceq X_{j,k} \quad \Leftrightarrow \quad n \leq j \ y \ m \leq k \ en \ \mathbb{N}.$$

Definición 2.3. *La sucesión doble $X_{n,m}$ será **decreciente** si*

$$X_{n,m} \succeq X_{j,k} \quad \Leftrightarrow \quad n \leq j \ y \ m \leq k \ en \ \mathbb{N}.$$

Definición 2.4. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ creciente o decreciente, entonces decimos que es una sucesión doble **monótona** .*

Observación 2.3. ***(Axioma del Supremo)***

Todo conjunto no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$ posee un supremo.

Teorema 2.4. ***(Convergencia Monótona)***

*Sea una **sucesión doble monótona** $X_{n,m}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones :*

1. *$X_{n,m}$ es convergente.*

2. *$X_{n,m}$ es acotada.*

Además

(a) Si $X_{n,m}$ es creciente y acotado superiormente, entonces

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = \sup \{ X_{n,m} \ | \ n,m \in \mathbb{N} \ \}.$$

Osea

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = \lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m}$$

$$= \sup \, \{ X_{n,m} \ \mid \ n, m \in \mathbb{N} \ \}.$$

(b) Si $X_{n,m}$ es decreciente y acotado inferiormente, entonces

$$\lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = \text{ínf} \, \{ X_{n,m} \ \mid \ n, m \in \mathbb{N} \ \}.$$

Osea

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = \lim_{n,m \longrightarrow +\infty} X_{n,m}$$

$$= \text{ínf} \, \{ X_{n,m} \ \mid \ n, m \in \mathbb{N} \ \}.$$

Demostración

Se vió en el ***Teorema 1.3.*** *que toda sucesión doble convergente sobre $\mathbb{K}$ es acotado.*

A la inversa, sea $X_{n,m}$ una sucesión monótona acotada, entonces $X_{n,m}$ es creciente o decreciente.

(a) Primero tratamos el caso que $X_{n,m}$ es creciente y acotado superiormente.

Por la ***Observación 2.3.****, el supremo existe $a^* = \sup \, \{X_{n,m} \ : n, m \in \mathbb{N}\}$.*

Mostraremos que los límites dobles e iterados de $X_{n,m}$ existen y son iguales a a^*, es decir que la sucesión doble converge a a^*.

Sea $\varepsilon > 0$ dado, entonces $a^* - \varepsilon$ no es un límite superior para el conjunto $\{X_{n,m} \ \mid n, m \in \mathbb{N}\}$; por lo tanto existen $k(\varepsilon)$ y $j(\varepsilon)$ tal que

$$a^* - \varepsilon < X_{k,j}.$$

Como la sucesión es creciente, para cada $(n, m) \geq (k, j)$ *se tiene que*

$$a^* - \varepsilon < X_{k,j} \leq X_{n,m}.$$

Por la propiedad del supremo, tenemos que

$$X_{n,m} \leq a^* < a^* - \varepsilon \qquad \forall \ \ (n, m) \geq (k, j)$$

Por lo tanto

$$a^* - \varepsilon < X_{n,m} < a^* - \varepsilon$$

si sólo si

$$|X_{n,m} - a^*| < \varepsilon.$$

Ya que $\varepsilon > 0$ *fue arbitrario, se demuestra que la sucesión* $X_{n,m}$ *converge al punto* a^*.

A continuación, para mostrar que

$$\underset{m \longrightarrow +\infty}{lim} \left(\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} X_{n,m} \right) = \underset{n,m \longrightarrow +\infty}{lim} X_{n,m} = a^*.$$

Teniendo en cuenta que dado $X_{n,m}$ *es acotada superiormente entonces para cada* $m \in \mathbb{N}$ *fijo, la sucesión simple* $\{X_{n,m} \ \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ *es acotada superiormente y creciente.*

Así, por el ***Teorema 1.4*** *para sucesiones simples, tenemos que*

$$\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} X_{n,m} = \sup \ \{X_{n,m} \ \ | \ \ n \in \mathbb{N} \ \} = l_m \qquad \forall \ m \in \mathbb{N}.$$

Entonces, por el ***Corolario 2.1*** *los límites iterados existen y*

$$\underset{m \longrightarrow +\infty}{lim} \left(\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} X_{n,m} \right) = \underset{n,m \longrightarrow +\infty}{lim} X_{n,m} = a^*.$$

De igual forma se puede demostrar que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{m\longrightarrow+\infty}X_{n,m}\right)=\lim_{n,m\longrightarrow+\infty}X_{n,m}=a^{*}.$$

(b) *Si* $X_{n,m}$ *es decreciente y acotada inferiormente, entonces la sucesión* $-X_{n,m}$ *es creciente y acotada superiormente.*

Por lo tanto, por la parte (a) *se tiene que*

$$\begin{aligned}\lim_{m\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}-X_{n,m}\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{m\longrightarrow+\infty}-X_{n,m}\right)&=\lim_{n,m\longrightarrow+\infty}-X_{n,m}\\&=\sup\{-X_{n,m}\ \mid\ n,m\in\mathbb{N}\}\\&=-\text{ínf}\ \{X_{n,m}\ \mid\ n,m\in\mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto se deduce que

$$\begin{aligned}\lim_{m\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}X_{n,m}\right)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{m\longrightarrow+\infty}X_{n,m}\right)&=\lim_{n,m\longrightarrow+\infty}X_{n,m}.\\&=\text{ínf}\ \{X_{n,m}\ \mid\ n,m\in\mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

■

2.3. Propiedades de las Subsucesiones Dobles

Definición 2.5. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$ y sea $(k_1, r_1) < (k_2, r_2) < \ldots < (k_n, r_n) < \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de pares de números naturales. A la sucesión X_{k_n,r_m} lo llamaremos **subsucesión** de $X_{n,m}$.*

Las subsucesiones dobles de sucesiones dobles convergentes también convergen al mismo límite, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *"Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$ y $l \in \mathbb{K}$. Si la sucesión doble $X_{n,m}$ converge a l, entonces cualquier subsucesión de $X_{n,m}$ también converge a l.*

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$|X_{n,m} - l| < \varepsilon.$$

Sea X_{K_n,r_m} una subsucesión de $X_{n,m}$, como (k_n, r_m) es una sucesión estrictamente creciente de pares de números naturales, entonces existe $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_{n_0} \geq N$ y $r_{m_0} \geq N$. Por lo tanto $k_n \geq N$ y $r_m \geq N$ para toda $n \geq n_0$ y $m \geq m_0$. Así, si $n, m \geq \max\{n_0, m_0\}$ entonces

$$|X_{k_n,r_m} - l| < \varepsilon".$$

$\blacksquare$

Lema 2.1. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$ y sea X_{k_n,r_m} una subsucesión de $X_{n,m}$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = f(n)$ existe, entonces*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{k_n, r_m} = f(k_n) \ \ para\ cada\ \ n \in \mathbb{N}$$

Demostración

Por hipótesis el $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = f(n)$ *existe para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{k_n, m} = f(k_n) \ \ para\ cada\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Tomando a $\{X_{k_n, r_m}\}_{m=1}^{\infty}$ *como una subsucesión de la sucesión simple* $\{X_{k_n, m}\}_{m=1}^{\infty}$*, tenemos que*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{k_n, r_m} = f(k_n) \ \ para\ cada\ \ n \in \mathbb{N}.$$

■

Lema 2.2. *"Sea una sucesión doble* $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{K}$ *y sea* X_{k_n, r_m} *una subsucesión de* $X_{n,m}$ *que satisface* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = a$*, entonces*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{k_n, r_m} \right) = a.$$

Demostración

La hipótesis implica que $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} = f(n)$ *luego existe, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(n) = a$*. Por el* ***Lema 2.1.*** *se tiene que:*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{k_n, r_m} = f(k_n) \ \ para\ cada\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Siendo $\{f(k_n)\}_{m=1}^{\infty}$ *una subsucesión de la sucesión* $\{f(n)\}_{m=1}^{\infty}$ *y* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(n) = a$*, entonces* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(k_n) = a$*. Concluimos que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{k_n, r_m} = a."$$

■

Observación 2.4. *"Si intercambiamos los papeles de n, m se verifican resultados similares a los* ***lemas 2.1. y 2.2.****". Es decir, si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = a$$

entonces

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{k_n,r_m} \right) = a \ .$$

"Los ***lemas 4.1 y 4.2*** *nos ayudan a demostrar el siguiente resultado".*

Corolario 2.2. *Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$ y existen los límites iterados que satisfacen*

1. $\displaystyle \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = a,$
2. $\displaystyle \lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{n,m} \right) = a.$

entonces los límites iterados de cualquier subsucesión doble X_{k_n,r_m} existen, y satisfacen

1. $\displaystyle \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{m \longrightarrow +\infty} X_{k_n,r_m} \right) = a,$
2. $\displaystyle \lim_{m \longrightarrow +\infty} \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} X_{k_n,r_m} \right) = a.$

"Observese que para el caso de una variable, llamamos **Punto Cumbre** de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a un número natural n tal que $a_m < a_n$ para todo $m > n$."

El concepto de Punto Cumbre es utilizado para demostrar el siguiente Teorema:

“ Cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión monótona ”.

Y así demostrar el Teorema de Bolzano - Weiestrass para sucesiones.

Ahora, aplicaremos el enunciado anterior para sucesiones dobles.

Definición 2.6. *“Sea una sucesión doble $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$. El término (k,r) es* ***punto cumbre*** *si*

$$X_{k,r} \geq X_{n,m} \ \ \textit{para todo} \ \ (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \textit{tal que} \ n < k \ \textit{y} \ m < r.$$

Es decir, $X_{k,r}$ no es excedido por algún otro término”.

¿ Cualquier sucesión doble tendrá punto cumbre? La respuesta a la pregunta es no, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. *“Sea una sucesión doble $X_{n,m} = n + m$. Utilizando la definición de punto cumbre tenemos que si*

$$n < k \ \ y \ \ m < r,$$

entonces

$$n + m < k + r.$$

Por lo que $X_{n,m}$ no tiene punto cumbre”.

Ahora si damos una sucesión acotada. ¿ Tendrá punto cumbre ? La respuesta a la pregunta es no, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. *“Sea una sucesión doble $X_{n,m} = -\dfrac{1}{n+m}$. Obtenemos que*

$$|X_{n,m}| \leq 1 \ .$$

Si

$$n < k \ \ y \ \ m < r \ \textit{entonces} \quad -\frac{1}{n+m} < -\frac{1}{k+r} \ .$$

Por lo que $X_{n,m}$ *no tiene punto cumbre".*

Teorema 2.6. *"Toda sucesión doble* $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{K}$ *tiene una subsucesión doble monótona.*

Demostración

Se tiene los siguientes casos:

Caso 1. *La sucesión doble* $X_{n,m}$ *tiene infinitos puntos cumbre. En este caso, si* $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ *y* $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ *son los puntos cumbre, entonces* $X_{k_1,r_1} \geq X_{k_2,r_2} \geq \ldots$ *, de modo que* X_{k_n,r_m} *es la subsucesión (no creciente) deseada.*

Caso 2. *La sucesión doble* $X_{n,m}$ *tiene solamente un número finito de puntos cumbre. En este caso, sea* (k_1, r_1) *mayor que todos los puntos cumbre. Puesto que* (k_1, r_1) *no es un punto cumbre, existe algún* $k_2 > k_1$ *y* $r_2 > r_1$ *tal que* $X_{k_2,r_2} > X_{k_1,r_1}$*. Puesto que* X_{k_2,r_2} *no es un punto cumbre, existe algún* $k_3 > k_2$ *y* $r_3 > r_2$ *tal que* $X_{k_3,r_3} > X_{k_2,r_2}$*. Continuando de esta forma obtenemos la sucesión (no decreciente) deseada.*

Caso 3. *La sucesión doble* $X_{n,m}$ *no tiene puntos cumbre. Este caso se resuelve de manera similar al caso anterior."*

$\blacksquare$

Teorema 2.7. *" **(Bolzano - Weiestrass).***

Toda sucesión doble acotada $X_{n,m}$ *sobre* $\mathbb{K}$ *tiene una subsucesión monótona convergente.*

Demostración

Sea $X_{n,m}$ una sucesión doble acotada sobre $\mathbb{K}$. Sabemos por el ***Teorema 2.6*** *que $X_{n,m}$ tiene una subsucesión doble X_{k_n,r_m} monótona. Siendo que X_{k_n,r_m}, es también acotada, entonces por el Teorema de convergencia monótona* ***Teorema 2.4*** *concluimos que X_{k_n,r_m} es convergente."*

■

Corolario 2.3. *"Sea una sucesión doble acotada $X_{n,m}$ sobre $\mathbb{K}$, entonces existe una subsucesión convergente X_{k_n,r_m} tal que*

1. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty} X_{k_n,r_m}\right)$ *y*
2. $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} X_{k_n,r_m}\right)$

existen y son iguales a el límite doble

$$\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{k_n,r_m}.$$

Demostración

Sea $X_{n,m}$ una sucesión doble acotada sobre $\mathbb{K}$ por hipótesis y sabemos por el ***Teorema 2.7.*** *que $X_{n,m}$ tiene una subsucesión monótona X_{k_n,r_m} tal que*

$$\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{k_n,r_m} \textit{ existe.}$$

Ya que la subsucesión es acotada, implicamos por el ***Teorema 3.1*** *que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{m\longrightarrow+\infty} X_{k_n,r_m}\right) = \lim_{m\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} X_{k_n,r_m}\right) = \lim_{n,m\longrightarrow+\infty} X_{k_n,r_m}".$$

■

Teorema 2.8. *" **(Criterio de Divergencia).***

Sea $X_{n,m}$ una sucesión doble acotada sobre $\mathbb{K}$ y $l \in \mathbb{K}$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones :

1. $X_{n,m}$ *no converge a* l.

2. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$, *existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que*

$$|X_{n_0,m_0} - l| \geq \varepsilon_0,$$

   para cada $n_0, m_0 \geq k$.

3. *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *y una subsucesión* X_{k_n,r_m} *de* $X_{n,m}$ *tal que*

$$|X_{k_n,r_m} - l| \geq \varepsilon_0 \quad \textit{para toda} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Demostración

$(1) \Rightarrow (2)$ *Negando la definición de convergencia tenemos esta implicación.*

$(2) \Rightarrow (3)$ *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *y* $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_1, m_1 \geq 1$, *implicamos que*

$$|X_{n_1,m_1} - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon_0.$$

Ahora , sea $n_2, m_2 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $(n_2, m_2) \geq (n_1 + 1, m_1 + 1)$, *entonces*

$$|X_{n_2,m_2} - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon_0.$$

Continuando con este proceso obtenemos una subsucesión X_{k_n,r_m} *estrictamente creciente de pares ordenados en* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *tal que*

$$|X_{k_n,r_m} - \mathfrak{a}| \geq \varepsilon_0.$$

$(3) \Rightarrow (1)$ *Es una equivalencia del* ***Teorema 2.5***.”

■

Teorema 2.9. *"Sea $X_{n,m}$ una sucesión doble acotada sobre $\mathbb{K}$ y $l \in \mathbb{K}$. $X_{n,m}$ tiene la propiedad que toda subsucesión es convergente, entonces la sucesión $X_{n,m}$ converge a l.*

Demostración

Supongamos que $X_{n,m}$ no converge a l. Entonces por el Criterio de Divergencia tenemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión X_{k_n,r_m} tal que

$$|X_{k_n,r_m} - l| \geq \varepsilon_0 \qquad (1)$$

para cada $n, m \in \mathbb{N}$.
Siendo $X_{n,m}$ acotada, entonces una subsucesión X_{k_n,r_m} también lo es. Ahora, por el teorema de Bolzano-Weierstrass X_{k_n,r_m} tiene una subsucesión X_{k_i,r_j} convergente. Por lo tanto,

$$\lim_{i,j \longrightarrow +\infty} X_{k_i,r_j} = l$$

esto significa que para cada $\varepsilon_0 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i, j \geq N$ implica que

$$|X_{k_i,r_j} - l| \leq \varepsilon_0 \qquad (2)$$

Ya que todo término de X_{k_i,r_j} es término de X_{k_n,r_m}, vemos que (2) es una contradicción de (1)." $\blacksquare$

Capítulo 3

Aplicaciones de las Sucesiones Dobles

3.1. Aplicaciones

En esta parte de nuestro trabajo demostraremos aplicaciones de las sucesiones dobles en la rama de la topología general, conocida como la teoría de los continuos.

Como sabemos, la teoría de los continuos es una rama en expansión de la topología general.

Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo con más de dos puntos.

3.2. Primera Aplicación

Daremos a continuación la definición de sucesión inversa vía sucesión doble.

Definición 3.1. *Sean*

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *: una sucesión de espacios métricos*

$\{f_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *: una sucesión de funciones continuas llamadas* *funciones ataduras.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ *tenemos que* $f_n^{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X_n$ *es una* *función atadura.* *Entonces, la sucesión doble* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *de espacios métricos y funciones continuas en* *teoría de continuos* *se llama una* ***sucesión inversa*** *y se representa por*

$$X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \xleftarrow{f_2^3} X_3 \longleftarrow \ldots \longleftarrow X_{n-1}^n \xleftarrow{f_{n-1}^n} X_n \xleftarrow{f_{n-1}^n} X_{n+1} \ldots$$

Observación 3.1. *Si* $m, n \in \mathbb{N}$ *y* $n > m$ *entonces* $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \ldots \circ f_{n-1}^n$ *y* $f_n^m = 1_{X_n}$*, donde* 1_{X_n} *denota la función identidad sobre* X_n.

Definición 3.2. *Sea*

$\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *: una sucesión inversa de espacios métricos y funciones atadura.*

El límite de la sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *se denota por*

$$\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} \text{ o por } X_\infty$$

y es un subespacio del espacio topológico producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

representada por :

$$\lim_{\longleftarrow}\{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \;\mid\; f_{n-1}^{n}(x_{n+1}) = x_n \textit{ para cada } n \in \mathbb{N}\right\}$$

Definición 1.1.4 Si $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de espacios métricos, con métricas acotadas, definimos una métrica ρ, para un producto cartesiano

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in X_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$$

$$\rho\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (x'_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, x'_n)$$

Observación 1.1.5 Desde que las métricas, d_n, son acotadas, ρ está bien definido.

Lema 1.1.6 Si $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de espacios métricos, con métricas acotadas, entonces ρ es una métrica.

Observación 3.2. *Si*

1. $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *es una sucesión inversa de espacios métricos y funciones atadura, entonces su límite inverso* X_∞ *es un espacio métrico. ([5], Lema 1.1.6).*

2. *A continuación desmostraremos vía sucesiones dobles, que el límite inverso* X_∞ *es un continuo.*

Definición 3.3. *Sea*

$$\{X_n, f_n^{n+1}\} \textit{ : sucesión inversa}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ *definimos los conjuntos siguientes*

$$S_m = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \;\mid\; f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k, 1 \le k < m\right\}$$

Definición 3.4. *Sean*

$\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *: sucesión inversa de espacios métricos y funciones atadura.*

X_∞ *: límite inverso de la sucesión dada.*

Entonces las funciones continuas

$$\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \longrightarrow X_m$$

se llamarán ***funciones proyección.***

Definición 2.1.7 Si $\{(X_m, f_n^{n+1})\}$ es una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso X_∞.

Para cada $m \in \mathbb{N}$,sea

$$S_m = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \;/\; f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k, 1 \leq k < m\}$$

El resultado siguiente puede consultarse en el (Teorema 1.1.9, [5])

Teorema 1.1.9 Sea Z un espacio métrico.

Si $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de espacios métricos, entonces una función

$$f : Z \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

es continua si sólo si $\pi_n \circ f$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.11 Si $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de compactos entonces $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es compacto.

Teorema 1.7.2 Si Z es un espacio métrico compacto y sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subcontinuos de Z tal que $X_{n+1} \subset X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces :

Si $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces X es un subcontinuo de Z.

Proposición 3.1. *Sean*

$\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *: sucesión inversa de espacios métricos y funciones atadura.*

X_∞ *: límite inverso de la sucesión* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$.

Entonces se verifica que :

(a) Para cada $m \in \mathbb{N}$*, el conjunto* S_m *es homeomorfo al producto topológico*

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

(b) La sucesión $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente de espacios métricos compactos y* $X_\infty \neq \emptyset$*. ($\emptyset$ es el conjunto vacío).*

(c) Si X_n *es un continuo para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces el límite inverso* X_∞ *es también un continuo.*

Demostración

(a) Sea $h : S_m \longrightarrow \prod_{n=m}^{\infty} X_n$ *tal que* $h((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=m}^{\infty}$.
Desde que $\pi_n \circ h$ *es continua para cada* $n \geq m$*, tenemos que* h *es continua. (Teorema 1.1.9,[5]).*
Sea ahora la función $g : \prod_{n=m}^{\infty} X_n \longrightarrow S_m$ *tal que* $g((x_n)_{n=m}^{\infty}) = (y_n)_{n=1}^{\infty}$*, donde* $y_n = x_n$ *si* $n \geq m$ *,* $y_n = f_n^m(X_m)$ *si* $n < m$.

Desde que $\pi_n \circ g$ *es continuo para cada* $n \in \mathbb{N}$*, por (Teorema 1.1.9, [5]) ,* g *resulta ser continua.*

Observamos que $g \circ h = 1_{S_m}$ *y* $h \circ g = 1_{\prod_{n=1}^{\infty} X_n}$*, entonces* h *es biyectiva.*

Por tanto, h *es un homeomorfismo y por consiguiente* S_m *y* $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *son homeomorfos.*

(b) Por definición $S_{m+1} \subset S_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Por la parte (a) cada S_m es un espacio métrico compacto (Teorema 1.1.11, [5]). Obviamente $X_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$.

(c) Esta parte se desprende de (b) y del (Teorema 1.7.2, [5]).

En efecto, por (b), $X_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$ y tenemos que X_∞ es un continuo.

3.3. Segunda Aplicación

Observación 3.3. *Otra aplicación de las sucesiones dobles se presenta cuando probamos que el límite inverso X_∞ es un continuo indescomponible. Con esta finalidad primero definiremos el compacto de sucesión inversa indescomponible.*

Definición 3.5. *Sea*

$\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *: una sucesión inversa de continuos y funciones atadura.*

Entonces,

$\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *se llama una sucesión inversa indescomponible, siempre que para cada $n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} y B_{n+1} son subcontinuos de X_{n+1} tales que*

$$X_{n+1} = A_{n+1} \cup B_{n+1}$$

y tenemos que

$$f_n^{n+1}(A_{n+1}) = X_n$$

o bien

$$f_n^{n+1}(B_{n+1}) = X_n.$$

Proposición 3.2. *Sean*

$$\{X_n, f_n^{n+1}\} \text{ : una sucesión inversa indescomponible.}$$

$$X_\infty \text{ : límite inverso de la sucesión dada.}$$

Entonces, X_∞ *es un continuo indescomponible.*

Demostración

Por la Proposición 3.1 el límite inverso X_∞ *es un continuo.*

Vamos a suponer ahora que X_∞ *es un continuo descomponible.*

Entonces existen dos subcontinuos propios A *y* B *de* X_∞ *tal* $X_\infty = A \cup B$.

Por proposición(2.1.15, [5]) existe $n \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m \geq n$*, entonces* $f_m(A) \neq X_m$ *y* $f_m(B) \neq X_m$.

Desde que por definición las funciones continuas atadura, f_n^{n+1} *son suryectivas, las funciones continuas proyección son también suryectivas.*

En consecuencia,

$$X_{n+2} = f_{n+2}(X_\infty) = f_{n+2}(A) \cup f_{n+2}(B).$$

Esto implica que

$$X_{n+1} = f_{n+1}^{n+2}(X_{n+2}) = \left(f_{n+1}^{n+2} \circ f_{n+2}\right)(A) \bigcup \left(f_{n+1}^{n+2} \circ f_{n+2}\right)(B)$$

Por hipótesis tenemos que

$$\left(f_{n+1}^{n+2} \circ f_{n+2}\right)(A) = X_{n+1}$$

o bien

$$\left(f_{n+1}^{n+2} \circ f_{n+2}\right)(B) = X_{n+1}.$$

Pero esto contradice la elección de n.

Por lo tanto, esta contradicción se debe a la falsedad de la hipótesis auxiliar, hemos supuesto que el límite inverso X_∞ *es un continuo descomponible. Por lo tanto* X_∞ *es un continuo indescomponible.*

3.4. Tercera Aplicación

Observación 3.4. *Una tercera aplicación de las sucesiones dobles es a la topología general, en los continuos casi enrejados y continuos enrejados. Veremos a continuación la definición de estos conceptos.*

Definición 3.6. *Una gráfica es una estructura formada por un conjunto no vacío V cuyos elementos son llamados vértices y un conjunto E de pares no ordenados de vértices llamadas aristas. Por comodidad una arista (u, v) será denotada por uv.*

Una gráfica se puede representar geométricamente mediante un dibujo en el cual los vértices son puntos y las aristas son líneas que conectan a los puntos. Si el número de vértices y de aristas del gráfico es punto, se dice que el gráfico es finito.

Ejemplo.

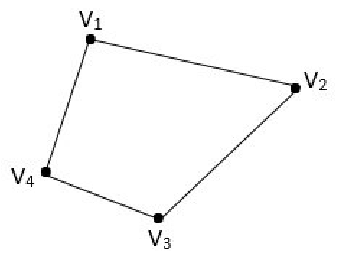
Sea la gráfica $\mathcal{G}$ definida por el conjunto de vértices

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

y por el conjunto de aristas

$$A = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$$

$\mathcal{G}$ es una gráfica finita.



Definición 3.7. *Sean*

X : *un continuo*

$\mathcal{G}(X) = \{x \in X \mid x$ *tiene una vecindad* G *en* X *tal que* G *es una gráfica finita* $\}$

$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X)$

Entonces,

(a) X *se llama continuo casi enrejado si* $\mathcal{G}(X)$ *es denso en* X*, esto es,*

$$\overline{\mathcal{G}(X)} = X$$

(b) Un continuo casi enrejado X *se llama continuo enrejado, si* X *tiene una base de vecindades* $\mathfrak{B}$ *tal que para cada* $V \in \mathfrak{B}$ *si verifica que* $V - \mathcal{P}(X)$ *es conexo.*

Ejemplo 3.1. *El continuo del siguiente gráfico se construye de la siguiente manera :*

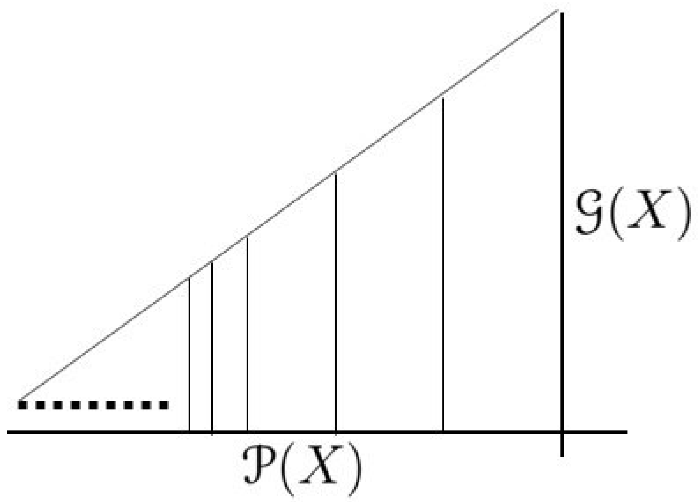
Tomamos el conjunto

$$X = ([-1,1] \times \{0\}) \bigcup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\{\frac{1}{n} \times \left[0, \frac{1}{n}\right]\right) \right)$$

X *provisto con la topología usual,* τ_{us}*, de* $\mathbb{R}^2$ *es un continuo. En este continuo* X *se tiene que*

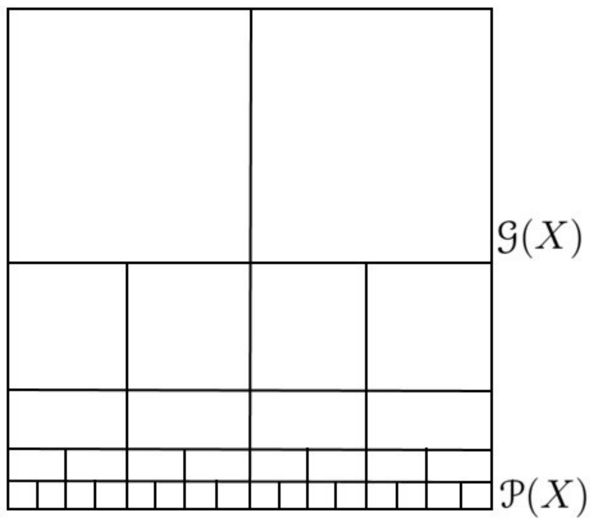
$$\mathcal{P}(X) = \{(0,0)\}$$

El continuo X *es casi enrejado, pero no es continuo enrejado, pues si tomamos cualquier abierto* $V \subset X$ *tal que* $(0,0) \in V$*, verifica que* $V - \mathcal{P}(X)$ *no es conexo.*



CONTINUO CASI ENREJADO NO ES ENREJADO

Ejemplo 3.2. *La siguiente figura representa un continuo enrejado*



CONTINUO ENREJADO

El continuo del gráfico se construye del siguiente modo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ *consideramos los conjuntos*

$$A_n = \{(x, 2^{-n+1}) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1\}$$

$$A_0 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1\}$$

Ahora consideramos los conjuntos

$$B_{n,m} = \{(m2^{-n-1}, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$$

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y cada entero* m *tal que* $0 \leq m \leq 2^{n+1}$.

Luego, consideramos

$$X = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \bigcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{m=0}^{2^{n+1}} B_{n,m} \right) \right)$$

X *es un continuo enrejado. En este espacio tenemos*

$$\mathcal{P}(X) = A_0$$

$$\mathcal{G}(X) = X - A_0 = X - \mathcal{P}(X)$$

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, Mathematical Analysis, Second edition, Addison Wesley, Massachussetts, U.S.S 1974.

[2] R. G Bartle and D. R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, Second edition, Wiley and Sons, New York. London. Sydney, 1992.

[3] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Third edition, McGraw-Hill, U.S.A, 1976.

[4] Yu Takeuchi, Sucesiones y series, Segunda reimpresión, Editorial Limusa, Universidad Nacional de Colombia, 1983.

[5] Sergio Macias, Topics on Continua, Chapman ad Hall / CRC, N.Y (2005).

[6] S.B. Nadler, Jr., Continuum Theory: An Introduction Monographs and text books in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, 1992.

[7] W. C. Olano, P. C. Contreras, A. G. Aliega y J. Sánchez, Tópicos de la Teoría de Continuos, Centro de Producción imprenta UNMSM, 2019.

Artículos:

[8] Eissa D. Habil, Double Sequences and Double Series. Islamic University of Gaza. P.O. Box 108, Gaza, Palestine.

[9] H. I. Miller - R. F. Patterson, Core Theorems for Double Subsequences and Rearrangements, Acta Math. Hugar.,119(1-2)(2008),71-80.

[10] Isabel Marrero, Integrales Impropias múltiples, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, Open Course Ware, 2011/12.

Tesis de licenciaturas:

[11] Alonso Monje Norma. Estudio de la Convergencia de Sucesiones Dobles y Algunas de sus aplicaciones. Tesis de Lincenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla - 2016 - México.